



Clasa a VIII-a

1. Relația din enunț revine la $(2x - y + 4)^2 \leq 0$, de unde rezultă că $y = 2x + 4$. Însă $y \in [1, 2]$ și $2x + 4 \in [2, 4]$, prin urmare $y = 2$, $x = -1$.

2. Deoarece $D'O$ este mediană în triunghiul isoscel $D'AC$, avem că $D'O \perp AC$, prin urmare $d(A, D'O) = AO = 2\sqrt{2}$ cm.

Cum măsura unghiului dintre dreptele BC și $D'O$ este de 60° , rezultă că măsura unghiului $A'D'O$ este de 60° . Atunci triunghiul isoscel $A'D'O$ este chiar echilateral, iar distanța de la punctul A' la dreapta $D'O$ este înălțimea acestui triunghi, cu lungimea de $2\sqrt{3}$ cm.

3. Din $(BCP) \parallel (ADQ)$, $(BCP) \cap (MNP) = NP$ și $(ADQ) \cap (MNP) = MQ$, rezultă că $NP \parallel MQ$. Analog se arată că $MN \parallel PQ$, prin urmare $MNPQ$ este paralelogram.

Dacă $NP \parallel (ABC)$, atunci $NP \parallel BC$ și, cum $BC \perp (ABN)$, deducem că $NP \perp (ABN)$ adică $NP \perp MN$ și astfel $MNPQ$ este dreptunghi.

Reciproc, dacă $MNPQ$ este dreptunghi și $MN \parallel AB$, avem că NP este perpendiculară pe dreptele concurente MN (deoarece $MNPQ$ este dreptunghi) și AB (fiindcă $AB \perp (BCP)$). Rezultă că $NP \perp (ABN)$ și, întrucât $BC \perp (ABN)$, obținem că $NP \parallel BC$.

4. Dacă $a \equiv r \pmod{12}$ și $a^3 \equiv r' \pmod{12}$, între resturile r și r' există următoarea corespondență:

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r'	0	1	8	3	4	5	0	7	8	9	4	11

Fie r_1 și r_2 resturile modulo 12 ale numerelor a , respectiv b cu proprietatea că $a^3 + b^3 \equiv 12$; presupunând că $r_1 \leq r_2$, vom avea că

$$(r_1, r_2) \in \{(0, 0), (0, 6), (6, 6), (1, 11), (2, 4), (2, 10), (4, 8), (8, 10), (3, 9), (5, 7)\}.$$

Cum A conține 8 multipli de 12, există $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ de submulțimi $\{a, b\}$ corespunzătoare situației $(r_1, r_2) = (0, 0)$. Apoi, vom avea $8 \cdot 8 = 64$ submulțimi $\{a, b\}$ corespunzătoare situației $(r_1, r_2) = (0, 6)$, $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ submulțimi când $(r_1, r_2) = (6, 6)$, $9 \cdot 8 = 72$ submulțimi dacă $(r_1, r_2) = (1, 11)$ etc.

În total, obținem $28 + 64 + 28 + 72 + 81 + 72 + 72 + 64 + 72 + 64 = 617$ submulțimi cu proprietatea din enunț.